УДК 519.816

М.Д. ГОДЛЕВСКИЙ, д-р. техн. наук,
В.В. МОСКАЛЕНКО, канд. техн. наук, ***В.В. КОНДРАЩЕНКО***

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОЙ СХЕМЫ ФИНАНСИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ ВНЕШНИХ ИНВЕСТИЦИЙ

Наведено математичну модель розрахунку оптимальної схеми фінансування інвестиційного проекту із залученням зовнішніх інвестицій. Модель відбиває інтереси підприємства та інвестора у отриманні максимального прибутку від реалізації проекту, вибір приоритетного джерела фінансування на основі принципу мінімізації вартості капіталу, а також враховує можливість вкладання внутрішніх інвестицій підприємством. Наведено також схему вирішення задачі оптимізації на базі динамічного підходу.

В современной практике управления проектами особое место занимает проблема планирования и обеспечения финансирования проекта. Это обусловлено тем, что зачастую бюджет проекта многократно превышает возможности предприятия, которому необходимо его реализовать, и единственным способом обеспечения полноценного финансирования является привлечение заемного капитала.

В данной работе рассматривается финансирование инвестиционного проекта, как за счет собственных средств, так и с привлечением внешних инвестиций. Для таких проектов характерно то, что основной целью реализации проекта, как правило, является получение прибыли. В случае, когда проект финансируется предприятием только за счет его собственных средств, вся прибыль поступает предприятию и распределяется по его усмотрению. Ситуация обстоит иначе, если в финансировании проекта принимает участие сторонний инвестор (далее в статье − инвестор). Инвестор, как и предприятие, является стороной заинтересованной в получении прибыли от проекта. В таком случае возникает вопрос: как должна распределяться прибыль между сторонами?

Наиболее простым и часто употребляемым подходом к решению проблемы является соглашение о том, что инвестор получает либо какую-то фиксированную сумму, либо фиксированный процент прибыли от реализации проекта.

В данной работе рассматривается задача формирования схемы финансирования проекта на основе критериев максимизации суммарной приведенной прибыли обеих сторон. Другими словами необходимо произвести расчет долей финансирования между инвестором и предприятием по этапам инвестиционного проекта.

Для инвестиционных проектов, в отличие от других видов проектов (научно-исследовательских, организационных и пр.), характерно то, что уже на стадии разработки коммерческого предложения определены и зафиксированы цель, затраты, продолжительность и срок завершения проекта; требуемые ресурсы и фактическая стоимость проекта зависят в первую очередь от хода реализации проектных работ; требуемые мощности должны предоставляться в соответствии с предварительно разработанным графиком [1]. Эти особенности формируют предпосылки для формализации процесса финансирования проекта с помощью математической модели.

Целью моделирования является определение для каждого этапа выполнения проекта оптимальных значений следующих величин:

- объем внешних инвестиций. Если на некотором этапе инвестиции не требуются, то их объем считается равным нулю;
- часть дохода от внедрения проекта, которая отчисляется инвестору;
- часть дохода от внедрения проекта, которая отчисляется предприятию;
- часть дохода предприятия, которую необходимо вложить на следующем этапе выполнения проекта.

Следовательно, можно выделить следующие критерии оптимальности схемы финансирования проекта:

- максимизация суммарной прибыли инвестора. Суммарная прибыль инвестора будет равна его суммарному доходу от реализации проекта минус его суммарные инвестиции;
- максимизация суммарной прибыли предприятия от реализации проекта. Затраты предприятия складываются из двух составляющих: целевые вложения предприятия на выполнение проекта, и отчисления части дохода на финансирование следующего этапа;
- минимизация стоимости капитала, затраченного на выполнение проекта. Так как финансирование проекта осуществляется из двух источников (средства предприятия и средства инвестора), то выбор приоритетного источника может быть осуществлен на основании оценки стоимости капитала источника финансирования. Так, стоимость капитала предприятия может быть оценена коэффициентом прибыльности альтернативного вложения средств, а стоимость капитала инвестора – минимальной величиной прибыльности данного проекта.

Будем считать, что все ресурсы, необходимые для выполнения проекта, представлены в стоимостном выражении, а весь период выполнения проекта разбит на N равных этапов. Для каждого этапа считаются известными объем средств $d_k \ (k=\overline{1,N})$, необходимый для вложения (затраты), и чистый доход проекта $p_k \ (k=\overline{1,N})$, который ожидается получить на данном этапе. В данной работе величины d_k и p_k считаются детерминированными и не учитывается риск невыполнения проекта.

Основное требование к реализации проекта состоит в необходимости его непрерывного выполнения в соответствии с запланированным графиком работ. В математической модели это требование выражается в том, что в начале каждого этапа денежных средств должно быть достаточно для покрытия расходов на этом этапе. Для этого могут быть задействованы:

- $q_k \ (k=\overline{1,N})$ − целевые средства, выделенные предприятием на реализацию проекта. Объемы целевых средств планируются предприятием для каждого этапа и являются фиксированными;
- $x_k \ (k=\overline{1,N})$ − внешние инвестиции, объем которых на каждом этапе является переменной величиной и определяется в ходе решения задачи. Величина x_k может быть ограничена некоторым фиксированным максимальным значением $x^{\max}$;
- $p_k^C \ (k=\overline{1,N})$ − объем внутренних инвестиций проекта, выделенных предприятием из чистого дохода *k*-го этапа в *(k+1)*-й этап. Данная величина является переменной.

Таким образом, для обеспечения непрерывного финансирования проекта необходимо выполнение условия:

$$x_k + p_{k-1}^C = c_k - q_k \quad (k=\overline{1,N}). \tag{1}$$

Предприятие и инвестор получают доход за счет поступлений от внедрения проекта $p_k \ (k=\overline{1,N})$. Поступления на k-ом этапе представим в виде суммы двух составляющих: дохода инвестора p_k^I и дохода предприятия p_k^{Π}.

$$p_k^I + p_k^{\Pi} = p_k \quad (k=\overline{1,N}). \tag{2}$$

Предприятие может вложить часть своего дохода *k*-го этапа в следующий *(k+1)*-й этап проекта, тем самым сократив внешние инвестиции. Размер отчислений обозначим p_k^C, причем

$$p_k^C \le p_k^{\Pi} \quad (k=\overline{1,N}). \tag{3}$$

Целесообразность самоинвестирования на том или ином этапе будем определять на основании критерия минимизация «стоимости» капитала:

$$V=\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha x_k+\varepsilon\,(p_{k-1}^{\Pi}-p_{k-1}^{C}+q_k)}{(1+r)^k}\to\min, \tag{4}$$

где c^I − коэффициент, характеризующий стоимость внешних инвестиций для предприятия; $c^{П}$ − коэффициент, характеризующий стоимость собственного капитала предприятия; r − рыночная стоимость капитала.

Как предприятие, так и инвестор, стремятся максимизировать свою прибыль от реализации проекта. Прибыль будем рассчитывать на основе чистого приведенного эффекта (NPV).

Стремление инвестора получить максимальную прибыль можно представить в виде следующего математического критерия:

$$NPV^I = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^I x_k}{(1+r)^k} \to \max, \tag{5}$$

где x_k – объем инвестиций в k-ом этапе (равен нулю, если инвестиции не вкладывались).

Интересы предприятия можно представить как:

$$NPV^{П} = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^{П} q_k}{(1+r)^k} \to \max. \tag{6}$$

В результате имеем модель инвестирования, состоящую из критериев (4)-(6) при ограничениях (1)-(3), а также

$$x_k \le x^{\max} \quad (k=\overline{1,N}); \tag{7}$$

$$p_k^I \ge 0,\; p_k^{П} \ge 0,\; p_k^C \ge 0,\; x_k \ge 0 \quad (k=\overline{1,T}), \tag{8}$$

причем $p_0^C = 0$, $p_0^{П} = 0$.

Тогда задача состоит в определении таких $x=\{x_k\}$, $p^I=\{p_k^I\}$, $p^{П}=\{p_k^{П}\}$, $p^C=\{p_k^C\}$, которые удовлетворяют ограничениям (1)-(3), (7)-(8) и доставляют экстремумы функциям (4)-(6).

Данная задача относится к классу многокритериальных задач линейного программирования с непрерывными переменными. Для её решения проведем взвешенную свертку критериев (4)-(6), предварительно их нормируя. Нормирование критериев выполним с помощью монотонного преобразования вида [2]:

$$\omega_i(f_i(\alpha)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^0 - f_i(\alpha)}{f_i^0 - f_{i(\min)}} & \forall i \in I_1 \\ \dfrac{f_i(\alpha) - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0} & \forall i \in I_2 \end{cases}, \tag{9}$$

где $f_{i(\min)}$, $f_{i(\max)}$ − соответственно наименьшие (наибольшие) значения максимизируемых (минимизируемых) функций цели на множестве допустимых альтернатив; f_i^0 − оптимальное значение i-ой функции цели на множестве допустимых альтернатив; I_1, I_2 − множество индексов соответственно для максимизируемых и минимизируемых функций цели.

Нормированные критерии для каждого этапа обозначим соответственно $\overline{NPV}_k^I$, $\overline{NPV}_k^{\Pi}$ и $\overline{V}_k$, тогда взвешенная свертка F_k будет иметь вид:

$$F_k = \alpha^I \cdot \overline{NPV}_k^I + \alpha^{\Pi} \cdot \overline{NPV}_k^{\Pi} + \alpha^V \cdot \overline{V}_k \to \min$$
$$\alpha^I + \alpha^{\Pi} + \alpha^V = 1, \tag{10}$$
$$\alpha^I \ge 0, \alpha^{\Pi} \ge 0, \alpha^V \ge 0,$$

где α^I, α^{Π} и α^V − характеризуют степень важности критериев соответственно NPV^I, NPV^{Π} и V. С экономической точки зрения большему значению α^I (α^{Π}) соответствует приоритет инвестора (предприятия) в распределении прибыли от проекта.

Ввиду линейности преобразования (9), суммарный критерий F является аддитивным, причем

$$F = \sum_{k=1}^{N} F_k \to \min$$

$$F_k = F_k(p_k^I, p_k^{\Pi}, p_{k-1}^C, x_k) = \alpha^I \cdot \overline{NPV}_k^I(p_k^I, x_k) + \tag{11}$$
$$+\alpha^{\Pi} \cdot \overline{NPV}_k^{\Pi}(p_k^{\Pi}, p_{k-1}^C) + \alpha^V \cdot V_k(p_{k-1}^C, x_k).$$

Таким образом, исходная задача может быть разбита на N подзадач, причем задачи, решаемые на *(k-1)*-м и k-м этапах, связаны между собой. Связь этапов выражается в том, что внутренние инвестиции p_{k-1}^C выделяются из дохода *(k-1)*-го этапа, а затрачиваются в следующем k-м этапе. Следовательно, для решения задачи (1)-(8) применим подход динамического программирования [3]. Для определения рекуррентного соотношения, связывающего *(k-1)*-й и k-й этапы, введем понятие условно оптимального значения функции F на k-м шаге F_k^{Σ} :

$$F_1^{\Sigma} = F_1(p_1^I, p_1^{\Pi}, 0, x_1);$$
$$F_2^{\Sigma} = F_1^{\Sigma} + F_2(p_2^I, p_2^{\Pi}, p_1^C, x_2);$$
....
$$F_N^{\Sigma} = F_{N-1}^{\Sigma} + F_N(p_N^I, p_N^{\Pi}, p_{N-1}^C, x_N).$$

Тогда искомое рекуррентное соотношение будет иметь вид:

$$F_k^{\Sigma} = F_{k-1}^{\Sigma} + F_k(p_k^I, p_k^{\Pi}, p_{k-1}^C, x_k)\,. \tag{12}$$

После проведенных преобразований решение задачи расчета оптимальной схемы финансирования проекта представляет собой N-шаговый процесс, на каждом шаге которого выполняется решение локальной задачи оптимизации вида:

$$F_k(p_k^I, p_k^{\Pi}, p_{k-1}^C, x_k) \to \min\,, \tag{13}$$

при ограничениях (1)-(3), (7)-(8). Данная задача оптимизации является задачей линейного программирования с четырьмя переменными, решение которой может быть выполнено одним классических методов исследования операций [4]. Решение, полученное в результате проведения N-шаговой оптимизации, носит рекомендательный характер и является оптимальным при заданных значениях α^I, α^{Π} и α^V. Задавая различные значения α^I, α^{Π} и α^V будет сформировано множество эффективных решений, каждое из которых будет соответствовать схеме финансирования инвестиционного проекта. В зависимости от состояния рынка капитала ЛПР будет выбирать одну из схем финансирования. Если задача не имеет решения, то это значит, что данный проект не может быть своевременно профинансирован при заданных условиях.

Дальнейшим развитием данной работы предполагается расчет схемы финансирования проекта на основе нечетких исходных данных с расчетом степени риска невыполнения проекта.

Список литературы: **1.** *Кобиляцкий Л.С.* Управление проектами. Учебное пособие. − МАУП, 2002. 198 с. **2.** *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 286 с. **3.** *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология: Учеб. Пособие для студ. вузов. – 2-е изд., стер.. – М.: Высш. шк., 2001. 208 с. **4.** *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование (теория, методы, приложения), - М.: “Наука”, 1969. 424 с.

Поступила в редколлегию 06.05.06